

考虑应变硬化效应的简支梁的后屈服性质

朱正宏

(上海交通大学)

摘要 本文对于由线性应变硬化刚塑性材料构成的矩形截面简支梁在中央集中载荷作用下的载荷-挠度关系进行了研究。文中不仅考虑了应变硬化效应使梁的极限弯矩增大的作用,而且还考虑了由于应变硬化而引起的塑性区的扩展所致的挠度改变对于梁的承载能力的影响。研究表明:不仅仅材料的应变硬化特性对于梁在屈服后的承载能力有显著的影响,梁的几何特征细长比也对梁在屈服后承载能力有很显著的影响。

关键词 塑性力学,梁,后屈服,应变硬化

1. 前言

在结构塑性理论中,对于梁的弯曲问题,一般都假设材料是理想刚塑性的,并且当梁的某截面上的弯矩达到其极限值后就认为在此处形成了一个塑性铰,整个梁形成为一个可动机构而失去了进一步的承载能力。文献[1]指出:“……实验表明:就中碳钢而言,塑性铰的概念是非常符合真实情况的。”

考虑图1所示简支梁,根据以上论述可知,当力作用点的最大弯矩 M 达到屈服值 M_0 时,梁在此点形成一个塑性铰而成为一可动机构。此时,外载荷 P 达到极限值 P_0 而不再增加。然而在实验中发现:梁在力作用点如不发生断裂的话是不可能发生如图1(b)所示的无穷大曲率改变。实际情况是在力作用点的一个局部区域内产生了巨大的曲率改变,同时又由于材料的应变硬化效应的影响,使得此局部能够承受大于 M_0 的弯矩,并使塑性区由力作用点向两端扩展,导致外载荷 P 继续增加^[2,3]。因此,研究应变硬化对于梁的后屈服行为的影响及塑性铰的概念是在什么程度上符合真实情况的是很有意义的。

目前,已有许多文章就应变硬化^[2,3]以及挠度^[4]对于梁的后屈服行为的影响分别地进行了

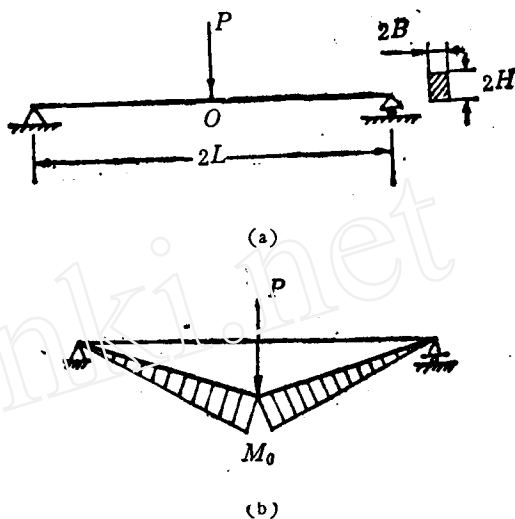


图1 简支梁模型

研究。然而应变硬化的作用不仅仅是使梁能承受的最大弯矩增大,同时也使梁的塑性区发生了改变,影响了梁的几何形状。本文根据这一观念对梁的后屈服性质进行了研究。为了方便分析工作,文中仅考虑图1所示的简支梁,并假设材料为线性应变硬化刚塑性。

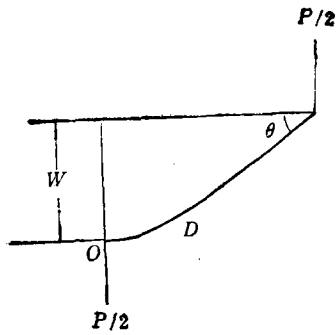
2. 分析

考虑图1所示的矩形梁,当载荷 P 小于 $2M_0/L$ 时,梁保持刚性。当 P 等于 $2M_0/L$ 时,力作用点 O 开始屈服,但其余部分仍保持刚性。当 P 继续增加时,塑性区开始从 O 点向二边扩展,形成变形部分 OD 及未变形部分 DC (图2(a))。

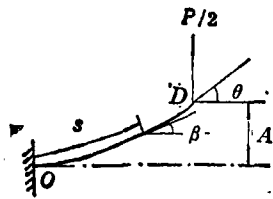
定义弧长 s 为变形段 OD 上的曲线坐标, β 为其倾角 (图2(b))。则其变形控制方程为

$$E_p I \frac{d^2 \beta}{ds^2} = -\frac{P}{2} \cos \beta \quad (1)$$

其中 $I = \frac{2}{3} BH^3$ 为梁的惯性矩。



(a) 作用在 1/2 模型上的力



(b) OD 段的变形

图 2

$$k^2 = \frac{P}{2E_p I}$$

$$\frac{d^2 \beta}{dS^2} = -k^2 \cos \beta \quad (2)$$

解方程(2)得

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\beta}{dS} \right)^2 = -k^2 \sin \beta + C \quad (3)$$

其中 C 为积分常数。

由于 D 点的曲率为零

$$\left. \frac{d\beta}{dS} \right|_{\beta=\theta} = 0 \quad (4)$$

于是式(3)成为

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\beta}{dS} \right)^2 = -k^2 (\sin \beta - \sin \theta) \quad (5)$$

对式(5)积分可得 OD 的弧长

$$l = \frac{1}{\sqrt{2} k} \int_0^\theta \frac{d\beta}{\sqrt{\sin \theta - \sin \beta}} \quad (6)$$

因为 $dA = dl \sin \beta$, 所以参数 A (图 2(b))

为

$$A = \frac{1}{\sqrt{2} k} \left[\sin \theta \int_0^\theta \frac{d\beta}{\sqrt{\sin \theta - \sin \beta}} \right]$$

$$- \int_0^\theta \sqrt{\sin \theta - \sin \beta} d\beta \quad (7)$$

根据图 2, 转角 θ , 弯矩 M_D 的表达式为

$$\sin \theta = \frac{W - A}{L - l} \quad (8)$$

$$M_D = \frac{P}{2} (L - l) \cos \theta = M_0 \quad (9)$$

取无量纲量

$$w = \frac{W}{L} \quad Q = \frac{A}{H} \quad h = \frac{H}{L}$$

$$m = \frac{l}{L} \quad n = kL \quad p = \frac{PL}{2M_0}$$

代入式(6)-(9)中得无量纲形式

$$p(1 - m) \cos \theta = 1 \quad (10)$$

$$m = \frac{1}{\sqrt{2} n} \int_0^\theta \frac{d\beta}{\sqrt{\sin \theta - \sin \beta}} \quad (11)$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2} nh} \left[\sin \theta \int_0^\theta \frac{d\beta}{\sqrt{\sin \theta - \sin \beta}} - \int_0^\theta \sqrt{\sin \theta - \sin \beta} d\beta \right] \quad (12)$$

$$\sin \theta = \frac{h(w - Q)}{1 - m} \quad (13)$$

至此, 得到了描述简支梁的后屈服行为的 4 个方程。假设 θ 很小, 于是有

$$\sin \theta \approx \theta \quad \cos \theta \approx 1$$

代入式(10)-(13)得

$$p(1 - m) = 1 \quad (14)$$

$$m = \frac{1}{\sqrt{2} n} \int_0^\theta \frac{d\beta}{\sqrt{\theta - \beta}} \quad (15)$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2} nh} \left[\theta \int_0^\theta \frac{d\beta}{\sqrt{\theta - \beta}} - \int_0^\theta \sqrt{\theta - \beta} d\beta \right] \quad (16)$$

$$\theta = \frac{h(w - Q)}{1 - m} \quad (17)$$

设 $\lambda = \frac{\sigma_0}{E_p}$, 则

$$n = \sqrt{\frac{3p\lambda}{2h}} \quad (18)$$

从式(14)-(17)可以求得

$$w = \frac{\lambda}{4h^2} \frac{(2p + 1)(p - 1)^2}{p^2} \quad (19)$$

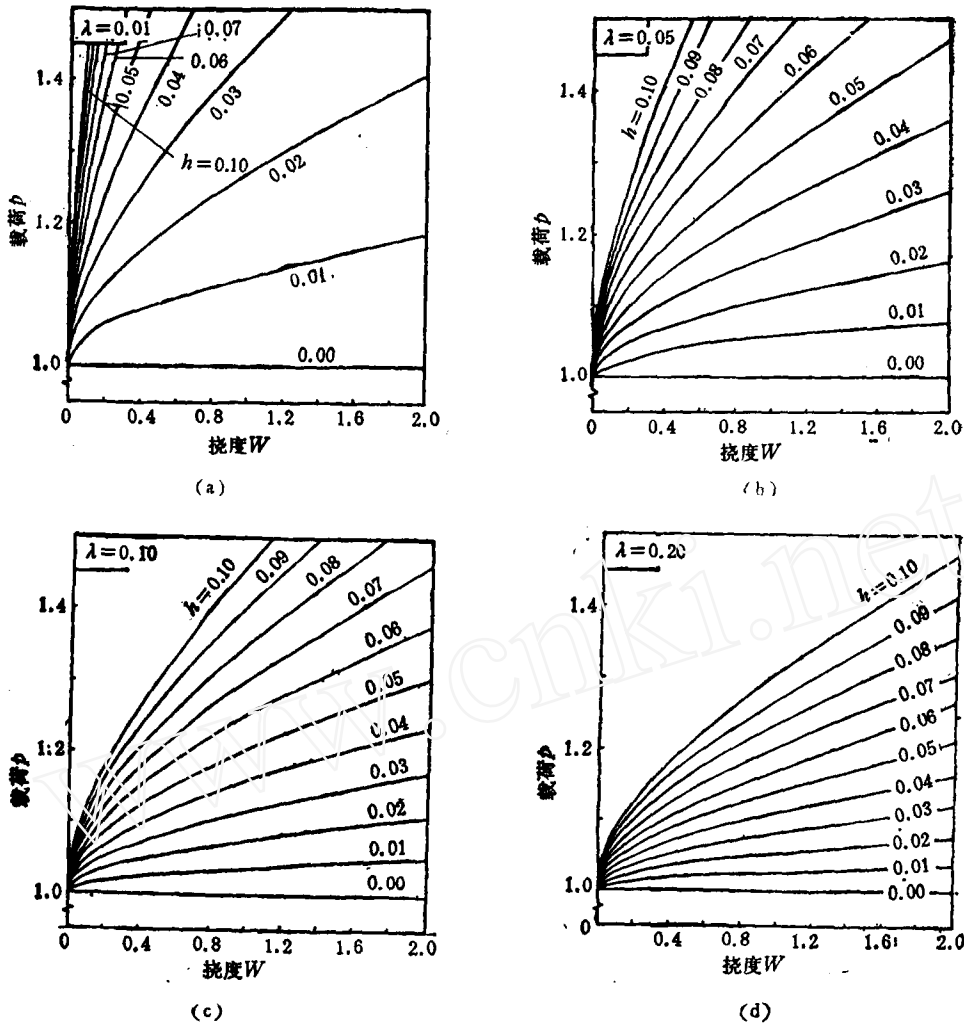


图3 载荷-挠度参数曲线族

式(19)就是无量纲形式的载荷-挠度关系。

如不考虑应变硬化效应,则令 $E_p = 0$ 。从式(14)~(18)可以看出,此时 $\lambda = \pi = \infty$, $m = a = 0$, $p = 1$, w 任意。这一结果与通常的结构塑性理论的分析一致。

为了进一步表明 λ 、 h 对于梁的承载能力的影响,图3给出了对一定的 λ 值以 h 为参数的曲线族。从图中发现:表征应变硬化特性的参数 λ 及梁的细长比 h 对于梁的承载能力 p 有显著的影响。对中碳钢而言,一般地 $0.1 \leq \lambda \leq 0.2$ 。从图4中可以看到:只有 $h = 0.01$ 的细长梁,即使当梁的最大挠度达到 $w = 2$ 时, p 仍小于 1.06 见图3(c)、(d)。此时忽略应变硬

化效应所带来的误差不大于 6%。但对于 $h > 0.01$ 的梁,载荷随着挠度的增加而增大, h 愈大, p 增加的速度愈快。如在 $\lambda = 0.2$ 的条件下(图3(c、d)),对 $h = 0.05$ 的梁,则当 $w \geq 0.5$ 时,就有 $p \geq 1.1$;对 $h = 0.10$ 的梁,则当 $w \geq 0.15$ 时,有 $p \geq 1.1$ 。由此可见,就是中碳钢材料,只有当 $h \leq 0.01$ 时,理想刚塑性才是很好的近似;而对于 $h > 0.01$ 的梁,在达到初始屈服后尚有一定的残余强度,其大小随 h 的增大而迅速增加。如材料的应变硬化作用较大,如图3(a)、(b)所示的 $\lambda = 0.05, 0.01$ 情况,则其残余强度在小挠度时也可达到很大的值,特别是在 h 值较大的情况下。

(下转第 59 页)

$$\begin{aligned} (B_Y)_y &= -\frac{v}{c^2} \frac{E'z}{[1 - (v^2/c^2) \sin^2 \theta]} \\ &= -\frac{v}{c^2} (E_Y)_z \\ (B_Y)_z &= \frac{v}{c^2} \frac{E'y}{[1 - (v^2/c^2) \sin^2 \theta]} \\ &= \frac{v}{c^2} (E_Y)_y \end{aligned}$$

现在我们选取的坐标,使杆的速度分量为

$$v_x = v, \quad v_y = v_z = 0,$$

由上面 B_Y 的分量式可得

$$B_Y = \frac{v}{c^2} \times E_Y \quad (7)$$

$$B_Y = \frac{v \times l E'}{c^2 l [1 - (v^2/c^2) \sin^2 \theta]} \quad (8)$$

当 $v \times l \neq 0$ 时, $B_Y \neq 0$, B_Y 的方向垂直于 v 和 E_Y 组成的平面,与运动电荷产生的磁场相比, B_Y 可称为“类磁杨氏模量”, E' 、 θ 含义同上, c 为真空中光速。

最后得到虎克定律的一般形式为

$$\begin{aligned} F &= \frac{\Delta l}{l} A \left[\frac{E' l}{l [1 - (v^2/c^2) \sin^2 \theta]} \right] \\ &+ \frac{\Delta l}{l} A v \times \left[\frac{v \times l E'}{c^2 l [1 - (v^2/c^2) \sin^2 \theta]} \right] \\ &= \frac{\Delta l}{l} A E_Y + \frac{\Delta l}{l} A v \times B_Y \quad (9) \end{aligned}$$

4. 对“类电杨氏模量”和“类磁杨氏模量”的可能理解

杆在外界作用下,在物体内部将形成“类电

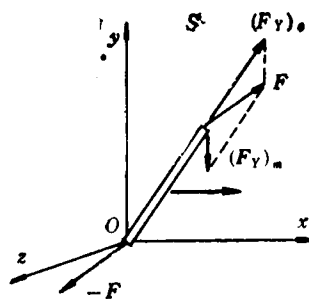


图 3

杨氏模量场”,该场由“类电杨氏模量”来描述,在该场中的物体将受到类电弹性力,可表示为

$$(F_Y)_e = \frac{\Delta l}{l} A E_Y,$$

运动的杆在外界作用下,将在物体内部形成“类磁杨氏模量场”,该场由“类磁杨氏模量”来描述,与磁力类似,在该场中运动的物体将受到类磁弹性力,可表示为:

$$(F_Y)_m = \frac{\Delta l}{l} A v \times B_Y,$$

如图 3 所示,这样,虎克定律的一般形式也可以表示为:

$$F = (F_Y)_e + (F_Y)_m \quad (10)$$

当 $v = 0$ 时,公式(9)回到原来的虎克定律(5)。原来的虎克定律(5),只能看成是虎克定律的一般形式(9),在 $v \ll c$ 情况下的近似结果。

(本文于 1988 年 3 月 13 日收到)

(上接第 62 页)

3. 结论

(1) 本文考虑了应变硬化对简支梁的后屈服性质的影响。虽仅在弯矩作用下,应变硬化的作用也是很明显的。

(2) 应变硬化对简支梁的后屈服性质的影响是显著的。梁的残余强度与硬化系数 λ 成反比。

(3) 在应变硬化条件下,梁的细长比 h 对于梁的后屈服性质有很大的影响。 h 越大,其残余强度也就越大。

参 考 文 献

- [1] Horne, M. R., *PLASTIC THEORY OF STRUCTURES*, The M. I. T. Press, Cambridge, Massachusetts (1971), 9.
- [2] Horne, M. R., 'The effect of strain-hardening on the equalisation of momenta in the simple plastic theory', *Welding Research* (1951), 5, 147.
- [3] Hrennikoff, A., *J. Struct. Div. ASCE*, **91**, ST4 (1965) 23-34.
- [4] Giu, S. S., *Int. J. Mech. Sci.*, **15**, 1973, 465-471.

(本文于 1988 年 7 月 7 日收到)